Soluție

1. a) Se verifică prin calcul.

b) $\det\left(A-A^t\right)=\det\left(A-A^t\right)^t=\det\left(A^t-A\right)=-\det\left(A-A^t\right)$, deci $\det\left(A-A^t\right)=0$.

c) $A-A^t\neq 0_3$, și în consecință, $\operatorname{rang}\left(A-A^t\right)\geq 1$.

Dacă $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, atunci $A-A^t=\begin{pmatrix} 0 & b-d & c-g \\ d-b & 0 & f-h \\ g-c & h-f & 0 \end{pmatrix}$.

Dacă am avea $\operatorname{rang}\left(A-A^t\right)=1$, atunci toți minorii de ordinul doi ai matricei ar fi nuli.

Obținem $b-d=h-f=c-g=0$, deci $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ c & f & i \end{pmatrix}$, adică $A=A^t$, fals.

Aşadar $\operatorname{rang}\left(A-A^t\right)\geq 2$ și cum $\det\left(A-A^t\right)=0$, rezultă $\operatorname{rang}\left(A-A^t\right)=2$.

2. a) Notând $x^2=t$ obținem ecuația $t^2-5t+4=0$, cu soluțiile $t_1=1$ şi $t_2=4$.
Rădăcinile lui f sunt $x_1=-2$, $x_2=-1$, $x_3=1$, $x_4=2$.

b) $\exists\, a\in\mathbb{Q}$ astfel ca $h=a\left(X+\frac{1}{2}\right)\left(X-\frac{1}{2}\right)(X+1)(X-1)$. Obținem $h=4X^4-5X^2+1$.

c) Din $g(-2)=g(-1)=g(1)=g(2)=2$ deducem că există polinomul cu coeficienți întregi q, astfel încât $g(X)=f(X)\cdot q(X)+2$. Presupunem contrariul, deci că există $n\in\mathbb{Z}$, astfel încât $g(n)=0$.
Obținem $(n-2)(n-1)(n+1)(n+2)\cdot q(n)=-2$.
Egalitatea anterioară având loc în mulțimea $\mathbb{Z}$, divizorii întregi ai lui -2 fiind $-2,-1,1,2$, obținem că două dintre numerele $n-2, n-1, n+1, n+2$ coincid, fals.